UNIVERSITE de PARIS DAUPHINE
Département MIDO - DEMI2E 1
Année 2012-2013

Macroéconomie-Examen de TD
Responsable du cours : Martine Carré-Tallon
Durée : 1h

"Aucun document autorisé"

1 Solow, le progrès technique et la croissance démographique [6 points]

Soit une économie industrielle dont la production repose sur la fonction Cobb-Douglas suivante : $F(K, EL) = K^{\alpha}(EL)^{\beta}$. La population y croit àă un taux n et le progrès technique àăun taux g. Le capital y est déprécié au taux δ.

1. Discutez de la forme des rendements d'échelle de la fonction de production.[0,5 point]
2. Calculez l'état stationnaire de cette économie en unité de travail efficace lorsque les rendements d'échelle sont constants (vous partirez du début de la démonstration). [2 points]
3. En reprenant les résultats précédents et en utilisant un graphique, discutez de la découverte d'un vaccin diminuant la mortalité infantile de façon très significative. Que se passerait-il si une guerre meurtrière éclatait avec un pays ennemi ? [2 points]
4. Expliquez les implications de la croissance de la population et du progrès technique sur le taux de croissance des variables par tête et en niveau àă l'état stationnaire. [1,5 points]

2 La règle d'or [4 points]

En utilisant les données de l'exercice précédent et sachant qu'à l'état stationnaire $\tilde{i^*} = (\delta + n + g)\tilde{k^*}$, répondez aux questions suivantes :

1. Déterminez l'état stationnaire de la règle d'or par unité de travail efficace $\tilde{k^*_{or}}$ (Sachant qu'àă l'Equilibre macroéconomique $Y = C + I$). [3 points]
2. Quel est l'arbitrage que les décideurs politiques doivent effectuer entre le court terme et le long terme ? [1 points]

II- Correction

Solow, le progrès technique et la croissance démographique

1. Afin de vérifier si les rendements sont constants nous devons vérifier de combien la production varie lorsque l'on fait varier les quantités de facteurs de production dans les mêmes proportions :

$$\begin{aligned}F(K_t, E_tL_t) &= (K_t)^{\alpha}(E_tL_t)^{\beta}\\ F(\lambda K_t, \lambda E_tL_t) &= (\lambda K_t)^{\alpha}(\lambda E_tL_t)^{\beta}\\ F(\lambda K_t, \lambda E_tL_t) &= \lambda^{\alpha+\beta}(K_t)^{\alpha}(E_tL_t)^{\beta}\\ F(\lambda K_t, \lambda E_tL_t) &= \lambda^{\alpha+\beta}F(K_t, E_tL_t)\end{aligned}$$

   Si $\alpha = \beta$ les rendements sont constants
   Si $\alpha + \beta > 1$ les rendements sont croissants
   Si $\alpha + \beta < 1$ les rendements sont décroissants

2. Soit une fonction de production à rendement d'échelle constant, avec progrès technique neutre au sens de Harrod.

$$F(K_t, E_tL_t) = K^{\alpha}(EL)^{1-\alpha}$$

   Nous savons qu'à l'état stationnaire $g_{\tilde{k}} = 0$, nous pouvons donc décomposer $g_{\tilde{k}}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathrm{g}_{\tilde{\mathrm{k}}} &\cong \ln \tilde{k}_{t+1} - \ln \tilde{k}_t \cong \ln\left(\frac{K_{t+1}}{E_{t+1}L_{t+1}}\right) - \ln\left(\frac{K_t}{E_tL_t}\right)\\ \mathrm{g}_{\tilde{\mathrm{k}}} &= [\ln K_{t+1} - \ln K_t] - [\ln L_{t+1} - \ln L_t] - [\ln E_{t+1} - \ln E_t]\\ \mathrm{g}_{\tilde{\mathrm{k}}} &= [\ln K_{t+1} - \ln L_{t+1} - \ln E_{t+1}] - [\ln K_t - \ln L_t - \ln E_t]\end{aligned}$$

   On peut donc réecrire $\mathrm{g}_{\tilde{\mathrm{k}}} = g_K - g_L - g_E = \frac{\Delta\tilde{k}}{\tilde{k}} = \frac{\Delta K}{K} - \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta E}{E}$
   D'après la loi d'accumulaton du capital, on sait que le stock de capital varie en fonction de l'investissement et de la dépréciation du capital, on peut donc $\Delta\mathrm{K} = \mathrm{I}-\delta\mathrm{K}$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\tilde{\mathrm{k}}}{\tilde{\mathrm{k}}} &= \frac{I-\delta K}{K} - n - g\\ \Delta\tilde{k} &= \frac{I}{EL} - \delta\frac{K}{EL} - n\frac{K}{EL} - g\frac{K}{EL}\\ \Delta\tilde{k} &= \tilde{i} - (\delta + n + g)\tilde{k}\end{aligned}$$

   A l'équilibre sur le marché des Biens et Services on a :

$$\begin{cases} Y = C + I\\ Y = S + I\end{cases}$$

   Ou encore $I = S$. On sait également que l'épargne nationale correspond à une proportion s du revenu national Y, avec s la propension à épargner. On a donc $S = sY$. On peut donc réecrire la dynamique d'accumulation du capital tel que :

$$\Delta\tilde{\mathrm{k}} = \mathrm{sf}(\tilde{\mathrm{k}}) - (\delta + \mathrm{n} + \mathrm{g})\tilde{\mathrm{k}}$$

Comme à l'état stationnaire la variation de stock de capital est nulle $\delta\tilde{k} = 0$ et $\mathrm{sf}(\tilde{\mathrm{k}}^*) = (\delta + \mathrm{n} + \mathrm{g})\tilde{\mathrm{k}}^*$. A partir de là, il est possible de connaître le capital par travailleur efficace et le revenu par travailleur efficace de l'état stationnaire :

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{s}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\tilde{y}^* = \tilde{k}^{*\alpha}$$

$$\tilde{y}^* = \left(\frac{s}{\delta + n + g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

3. La découverte d'un vaccin ferait varier le taux de croissance de la population n, qui serait par conséquent plus forte. L'augmentation de n aura pour effet de diminuer le niveau de l'état stationnaire ($\tilde{y}^* = \left(\frac{s}{\delta+n+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ et $\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{\delta+n+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$). Le taux de croissance des variables par travailleur efficace à l'Etat stationnaire ne s'en trouvera pas affecté et sera toujours égal à zéro.
   En effet, à l'état stationnaire, la variation du stock de capital par travailleur efficace est nulle ainsi que la croissance du revenu par unité de travail efficace, on a $g_{\tilde{y}} = g_{\tilde{k}} = 0$
   On sait que $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} = g_Y$, ce qui peut s'écrire $\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = 1 + g_Y$. Ceci correspond à $g_Y \cong \ln(Y_{t+1}) - \ln(Y_t)$.

   L'écriture du revenu en forme intensive est de la forme $y = \frac{Y}{L}$ on a donc :

$$g_y \cong \ln(Y_{t+1}) - \ln(Y_t) - [\ln(L_{t+1}) - \ln(L_t)] \cong g_Y - g_L$$
$$g_y = g_Y - g_L = (n + g) - n = g$$

   On peut faire le même raisonnement pour le taux de croissance du capital par tête à l'état stationnaire et on obtient $g_y = g_k = g$. La croissance des variables par tête ne dépendent pas de n, il n'y a donc pas d'effet de la découverte du vaccin sur le taux de croissance des variables par tête à l'Etat stationnaire.
   Par contre le taux de croissance des variables en niveau à l'Etat stationnaire augmenteront au même rythme que la hausse de la croissance démographique. En effet, on sait qu'à l'état stationnaire, la variation du stock de capital par travailleur efficace est nulle. On a $g_{\tilde{k}} = 0$. On sait également que :

$$\begin{cases} \mathrm{g}_{\tilde{\mathrm{k}}} = g_K - g_L - g_E \\ \mathrm{g}_{\mathrm{K}} = g_{\tilde{k}} + g_L + g_E = 0 + n + g = n + g \end{cases}$$

   On peut avoir le même raisonnement pour le revenu national. On a donc $g_Y = g_K = n + g$, par conséquent la modification de n aura un impact sur la croissance des variables en niveau à l'Etat stationnaire.

Par contre, une guerre meurtrière aura pour effet de diminuer de manière brutale L_t, mais cette guerre ne semble par modifier pour autant le taux de croissance de long terme de cette économie ($g_{\tilde{k}} = g\tilde{y} = 0$ et $g_y = g_k = g$ et $g_Y = g_K = n + g$). Elle aura donc un impact sur la dynamique transitoire en provoquant un éloignement de l'état stationnaire. Cet éloignement implique que le taux de croissance de court terme, le long de la dynamique transitoire, augmente.

En effet, le principe de convergence suppose que plus un pays est éloigné de son état stationnaire plus son taux de croissance est fort le long du sentier de croissance équilibré.

4. en reprenant les résultats précédents on observe que le taux de croissance du progrès technique affecte le taux de croissance des variables pas tête *et* en niveau à l'Etat stationnaire. Alors que la croissance démographique n'affecte que la croissance des variables en niveau à l'Etat stationnaire mais pas celui des variables par tête.

La règle d'or

1. On sait d'après l'équilibre sur le marché des Biens et Services que $Y = C + I$. En écriture intensive on a $c = f(k) - i$. La consommation de la règle d'or permet de déterminer la consommation de l'Etat stationnaire maximale. La consommation de l'Etat stationnaire s'écrit : $\tilde{c}^* = f(\tilde{k})^* - \tilde{i}^*$. D'après nos calculs précédents et l'énoncé on peut écrire : $\tilde{c}^* = f(\tilde{k})^* - (\delta + n + g)\tilde{k}^*$. La consommation de l'Etat stationnaire est maximale lorsque $\frac{\partial \tilde{c}^*}{\partial \tilde{k}^*} = 0$. Nous avons alors $f'(\tilde{k})^* = (\delta + n + g)$. Comme $f'(\tilde{k})^* = \alpha \tilde{k}^{*\alpha-1}$ on a $\alpha \tilde{k}^{*\alpha-1} = (\delta + n + g)$ et $\tilde{k}^* = \frac{(\delta+n+g)}{\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}$
2. Chez Solow, le taux d'épargne ne joue pas sur le taux de croissance de long terme mais uniquement sur le niveau du produit par tête à l'état stationnaire, et sur le taux de croissance durant la phase de transition vers l'état stationnaire. Durant cette période qui peut être longue, on observe un arbitrage entre épargner plus aujourd'hui pour avoir plus de produit par tête et plus de consommation demain, ou consommer plus aujourd'hui en épargnant moins et avoir moins de produit par tête et de consommation demain. Dans la détermination du taux d'épargne optimal qui correspond au taux d'épargne de la règle d'or, on retrouve très exactement cet arbitrage entre aujourd'hui et demain.