

## 1 Modèle de Solow, progrès technique et politique monétaire

Soit une fonction de production Cobb-Douglas du type :  $Y_t = K_t^\alpha (E_t L_t)^{1-\alpha}$ . On suppose que le progrès technique noté  $E_t$  est exogène et croît au taux  $g > 0$ . La taille de la population est notée  $L_t$  et croît au taux constant  $n$ . Nous supposons que l'épargne est exogène et noté  $s$ .

La demande de capital  $K_t$  dépend du stock de capital  $S_t^K$  et du taux d'intérêt réel  $r_t$ , tel que  $K_t = \frac{S_t^K}{r_t}$ . Le taux de croissance de la demande de capital se note  $g_{K_t}$  et le taux d'intérêt réel est constant et croît au taux  $\phi$ .

Le taux de croissance du stock de capital se note  $g_{S_t^K}$ . Ce taux de croissance se déduit de la loi d'accumulation du capital qui est définie par  $S_{t+1}^K = S_t^K + I_t - \delta S_t^K$ . Par conséquent  $S_{t+1}^K - S_t^K = I_t - \delta S_t^K$

On introduit le capital par travailleur efficace  $\tilde{k} = \frac{K_t}{E_t L_t}$  et la production par travailleur efficace  $\tilde{y} = \frac{Y_t}{E_t L_t}$ .

1.  $\tilde{y} = \tilde{k}^\alpha$ . [0.5 points]
2.  $r_t = i - \pi$ . [0.5 points]
3.  $K_t = \frac{S_t^K}{r_t}$ , d'où  $g_{K_t} = g_{S_t^K} - g_{r_t} = g_{S_t^K} - \phi$  [1 point]
4. D'après la question 2, on observe facilement que  $\pi$  diminue  $r_t$ , donc  $r_{t+1} < r_t$  et  $g_{r_t}$  diminue. D'après la question 3 on voit donc que le taux de croissance de la demande de capital  $g_{K_t}$  diminue. Ce qui est logique puisqu'on a vu que l'inflation était bénéfique pour les emprunteurs puisque l'inflation diminue le pouvoir d'achat de la monnaie. Dans ce cas, la demande d'investissement augmente et par conséquent le taux de croissance du stock de capital augmente également. [1.5 points]
5. Le taux de croissance du capital par travailleur efficace s'écrit  $g_{\tilde{k}} = \frac{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t}{\tilde{k}_t}$ . En transformant cette équation en logarithme on a  $g_{\tilde{k}} = \ln(\tilde{k}_{t+1}) - \ln(\tilde{k}_t)$ . Comme vu dans

l'énoncé,  $\tilde{k} = \frac{K_t}{E_t L_t}$  on peut donc écrire  $g_{\tilde{k}} = \ln(K_{t+1}) - \ln(K_t) - [\ln(E_{t+1}) - \ln(E_t)] - [\ln(L_{t+1}) - \ln(L_t)]$  soit  $g_{\tilde{k}} = g_{K_t} - g_{E_t} - g_{L_t} = g_K - (g + n)$ . Or, d'après la question 3,  $g_{K_t} = g_{S_t^K} - \phi$ , d'où  $g_{\tilde{k}} = g_{S_t^K} - (n + g + \phi)$ . D'après l'énoncé, la loi d'accumulation du capital nous donne que  $S_{t+1} - S_t^K = I_t - \delta S_t^K$ , nous pouvons donc écrire  $g_{\tilde{k}} = \frac{I_t - \delta}{S_t^K} - (\phi + n + g)$ . Par conséquent  $\Delta \tilde{k} = \frac{I_t}{S_t^K} \tilde{k} - (\delta + n + g + \phi) \tilde{k}$ , d'où  $\Delta \tilde{k} = \frac{I_t}{S_t^K} \frac{K_t}{E_t L_t} - (\delta + n + g + \phi) \tilde{k}$ , donc  $\Delta \tilde{k} = \frac{\tilde{i}_t}{r_t} - (\delta + n + g + \phi) \tilde{k}$ . En démontrant que  $\tilde{i}_t = sf(\tilde{k})$  on obtient  $\Delta \tilde{k} = \frac{sf(\tilde{k})}{r_t} - (\delta + n + g + \phi) \tilde{k}$  [2 points]

6. Comme à l'état stationnaire  $\Delta \tilde{k} = 0$ , on a  $\frac{sk_t^\alpha}{r_t} - (\delta + n + g + \phi) \tilde{k} = 0$  on a  $\tilde{k}^* = \left[ \frac{s}{r_t(\delta+n+g+\phi)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$  et  $\tilde{y}^* = \left[ \frac{s}{r_t(\delta+n+g+\phi)} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$  [1 point]

7. D'après l'énoncé,  $\phi$ , le taux de croissance de LT de  $r_t$  est constant. Par contre, l'inflation aura un impact sur  $r_t$  comme vu à la question 4. Dans ce cas le dénominateur diminue et  $\tilde{k}^*$  et  $\tilde{y}^*$  augmentent. Exemples de politiques économiques : La politique nataliste de LT peut faire varier  $n$  et aura un effet négatif sur l'état stationnaire. Une politique d'aide à l'innovation (comme le crédit impôt recherche) peut faire augmenter  $g$  et a un effet négatif sur l'état stationnaire. [2 points]

8. On sait qu'à l'état stationnaire, les variables par travailleurs efficaces ne croissent plus et on a  $g_{\tilde{k}} = g_{\tilde{y}} = 0$ . Comme on l'a démontré précédemment,  $g_{\tilde{k}} = g_{K_t} - g_{E_t} - g_{L_t} = g_K - (g + n)$  d'où  $g_{\tilde{k}} = g_{S_t^K} - (n + g + \phi)$ . En transformant ces équation on obtient  $0 = g_{K_t} - g - n$  ou  $0 = g_{S_t^K} - (\phi + n + g)$ . Donc  $g_{K_t} = n + g$  et  $g_{S_t^K} = \phi + n + g$  et de la même manière  $g_{y_t} = n + g$ . Enfin, concernant les variables par tête, on sait que  $g_{k_t} = g_{K_t} - g_{L_t} = n + g - n = g$  et  $g_{y_t} = g_{K_t} - g_{L_t} = n + g - n = g$

9. Les économistes observent que le pays Ailleurs et le pays Biendici sont dotés de la même fonction de production. Ils observent également qu'à la date  $t$  le pays Ailleurs est plus loin de son état stationnaire que le pays Biendici ( $k_A < k_B$ ).

a) Le pays Ailleurs car il est plus loin de son état stationnaire. Du fait de la loi des rendements décroissants etc.... [1 point]

b) Si  $g$  diminue,  $\tilde{k}^*$  et  $\tilde{y}^*$  augmentent. Donc d'après le graphique, la droite de dépréciation se déplace vers la droite et l'état stationnaire du pays A est plus éloigné, par conséquent sa croissance à court terme sera plus forte puisqu'il est plus loin de son état stationnaire. De même, d'après la question 5, on a vu que la dynamique d'accumulation du capital s'écrivait  $\Delta \tilde{k} = \frac{sk_t^\alpha}{r_t} - (\delta + n + g + \phi) \tilde{k}$ , donc une diminution de  $g$  augmente  $\Delta \tilde{k}$ . [2 points]

10. Nous supposons désormais que l'économie mène une politique monétaire expansionniste, qui implique une baisse du taux d'intérêt nominal  $i$ .

a)  $MV = PY$

b) si  $i$  diminue  $\frac{\Delta M}{M}$  augmente [0.5 points]

- c)  $\frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta P}{P}$ . Comme la vitesse de circulation de la monnaie est constante on a  $\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta M}{M} - \frac{\Delta Y}{Y}$ . Donc si M augmente, toutes choses égales par ailleurs, P augmente [0.5 points]
- d) D'après la question 9, on a vu que la croissance de Y est égale à  $g_{Y_t} = n + g$ , donc l'augmentation de  $r_t$  n'impacte pas la croissance des variables en niveaux. Ainsi, la politique monétaire a un effet inflationniste, puisque  $\frac{\Delta M}{M}$  augmente mais  $\frac{\Delta Y}{Y}$  est inchangé suite à la variation de  $r_t$ . Ce qui montre bien que la politique monétaire n'a pas d'effet sur l'économie réelle. [1 point]
- e) La politique budgétaire expansionniste augmente le taux d'intérêt réel  $r_t$  et provoque donc une augmentation de la demande d'épargne et une diminution de la demande d'encaisse réelle. Il se produit un déplacement de la demande de monnaie vers la gauche et à offre de monnaie constante ceci provoque de l'inflation. Donc l'état pourrait mener une politique budgétaire restrictive pour réduire la demande de monnaie. Ceci à offre de monnaie constante diminue l'inflation. Cf le graphique vu en TD. [1.5 points]